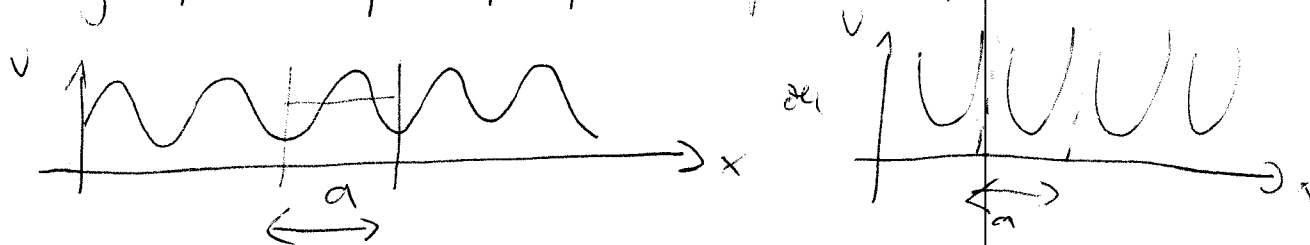


Simetria por translações discretas [BALL. 5.3]

①

- Imagine partículas ^{meigas a} ~~potenciais~~ potencial periódico (período "a"):



$$\hat{T}(a) = \exp(-i \frac{p a}{\hbar}) = \text{op. de translação por dist. } a.$$

$$\hat{T}^{\dagger}(a) V(x) \hat{T}(a) = V(x+a) = V(x) \leftarrow V(x) \text{ é período } a \text{ e é invariante por } \hat{T}(a).$$

$$\hat{T}^{\dagger}(a) p^2 \hat{T}(a) = p^2$$

$$\Rightarrow \hat{T}^{\dagger}(a) H \hat{T}(a) = H \Rightarrow [H, \hat{T}(a)] = 0 \leftarrow H \text{ também é invariante por } \hat{T}(a).$$

$\Rightarrow$ Deve haver auto-estados comuns a $\{H, \hat{T}(a)\}$.

$$\begin{cases} H|\psi\rangle = E|\psi\rangle & \text{I} \\ \hat{T}(na) |\psi\rangle = c_n |\psi\rangle & \text{II} \end{cases}$$

Sei que $\hat{T}(na) \hat{T}(ma) = \hat{T}(m+n)a \Rightarrow c_n \cdot c_m = c_{m+n}$

- Esta relação entre autovalores só é satisfeita pela função exponencial:

$$c_n = \exp(-i k n a)$$

$\hat{T}(na)$ é unitário $\Rightarrow |c_n| = 1 \Rightarrow k$ deve ser real.

Eq. II na repus. de posic $[\cdot \langle x' |]$

$$\Rightarrow \langle x' | \hat{U}(na) | \psi \rangle = c_n \langle x' | \psi \rangle$$



$$\langle x' - na | \psi \rangle = \exp(-iKna) \langle x' | \psi \rangle$$

$$\boxed{\psi(x' - na) = \exp(-iKna) \psi(x')} \quad \text{III.}$$

• É fácil verificar que a eq. III é satisfeita por

$$\psi(x) = e^{iKx} \cdot u_K(x)$$

$$\Rightarrow \psi(x - na) = e^{iK(x-na)} u_K(x - na) \quad \text{Se } u_K(x - na) = u_K(x)$$

$$\Rightarrow \psi(x - na) = e^{-iKna} \underbrace{e^{iKx} u_K(x)}_{\psi(x)} \quad (u_K \text{ é função c/ período } a)$$

$$\psi(x) \Rightarrow \text{satisfaz III.}$$

Conclusão: podemos escolher autovalores simultâneos de H e $\hat{T}(a)$ com

a forma: $\boxed{\psi(x) = e^{iKx} u_K(x)}$ com $u_K(x)$ função periódica de

= (onda plana) $\cdot$ (função c/ período da rede de potenciais) ^{periódica}

(teorema de Bloch)